



You are free: to copy, distribute and transmit the work; to adapt the work.  
You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor

## CONTROLE DE QUALIDADE DA ÁGUA MEDIDO ATRAVÉS DE CARTAS DE CONTROLE DE SHEWHART, CUSUM E MMEP

Franciele Aní Caovilla Follador<sup>1</sup>; Márcio Antônio Vilas Boas<sup>2</sup>; Larissa Malmann<sup>3</sup>; Marlise Schoenhals<sup>4</sup>; Rosangela Villwock<sup>5</sup>

### RESUMO

O trabalho objetivou demonstrar o uso de cartas de controle do tipo Shewhart (gráfico individual), Cusum (somas acumuladas) e MMEP (média móvel exponencialmente ponderada) no controle de qualidade, aplicado principalmente a qualidade da água. A metodologia é descrita através da estatística segundo MONTGOMERY (2004) e a construção dos gráficos pelo programa Minitab versão 15.0. Conclui-se que as cartas de controle são métodos eficazes para a determinação de causas especiais que podem estar atuando nos processos. Mesmo com elevada variabilidade dos dados, as cartas mostram-se como alternativas interessantes de metodologia estatística. Dentre as cartas de controle usadas nos trabalhos analisados nesta pesquisa, a MMEP mostrou-se mais eficaz, principalmente quando se tratar de estudos para indicar o controle de qualidade de água.

**Palavras-chave:** Planejamento ambiental, controle estatístico, qualidade da água

### WATER QUALITY CONTROL MEASURED BY SHEWHART CONTROL CHARTS, CUSUM AND EWMA

#### ABSTRACT

The study aimed to demonstrate the use of control charts, Shewhart-type (individual graph) Cusum (cumulative sum) and EWMA (exponentially weighted moving average) quality control applied mainly to water quality. The methodology is described by the second statistical Montgomery (2004) and the construction of graphics by Minitab version 15.0. It is concluded that control charts are effective methods for the determination of special causes that may be acting in the process. Even with high variability of the data, the letters show up as interesting alternatives to the statistical methodology. Among the control charts used in the studies analyzed in this study, the EWMA was more effective, especially when they are studies to indicate the quality control of water.

**Key-words:** Environmental planning, statistical control, water quality

Trabalho recebido em 09/09/2011 e aceito para publicação em 25/07/2012.

<sup>1</sup>Doutora em Eng. Agrícola – Recursos hídricos e Saneamento ambiental –UNIOESTE. e-mail: francaovilla@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Doutor em Agronomia. Prof. Associado C UNIOESTE.

<sup>3</sup>Doutoranda em Eng. Agrícola –UNIOESTE.

<sup>4</sup>Mestre em Eng. Química –UFSC. Professora de Eng. Ambiental da UTFPR. e-mail: marlise@utfpr.edu.br

<sup>5</sup>Doutora em métodos numéricos - UFPR.

## 1. INTRODUÇÃO

A qualidade sempre foi uma preocupação, desde a época da produção artesanal, quando já se procurava atender da melhor forma os anseios dos consumidores. Adquiriu ainda maior importância na produção em massa, com a inspeção do produto no final do processo produtivo. Com o desenvolvimento de novos modelos gerenciais, a qualidade foi sendo focalizada ainda durante o processo produtivo, principalmente através de técnicas estatísticas (VARGAS, LOPES ; SOUZA, 2004).

A qualidade tem tomado parte em todos os produtos e serviços. A consciência de sua importância e a introdução de métodos formais para o controle e a melhoria de qualidade passou por um processo de desenvolvimento evolutivo. Entre os anos de 1700 e 1900, a qualidade era determinada pelo esforço individual do profissional. Somente mais tarde aparece a introdução de novos conceitos, entre eles o da metodologia estatística para a melhoria da qualidade (VARGAS, LOPES ; SOUZA, 2004).

O controle de qualidade teve início na década de 1930, nos Estados Unidos por meio do gráfico de controle inventado por Shewhart, que os aplicou industrialmente, prevendo problemas relacionados à qualidade (MONTGOMERY, 2004).

Para MONTGOMERY (2004), uma das definições aceitas para qualidade é o inverso da variabilidade (variabilidade inadequada é sinônimo de desperdício de dinheiro, tempo e esforços), melhorando a aceitação do produto. A variabilidade pode ser determinada com base em medidas específicas, entre as quais se sobressai o desvio-padrão.

O controle de qualidade é vital por permitir que falhas sejam detectadas. Mais do que isso, sua função é importante ao possibilitar informações para não somente detectar os defeitos, como também para enfatizar a necessidade de melhoria no processo. Ou seja, terá a função de identificar as falhas no processo, definir suas causas e apontar formas para que estas não se repitam (MONTGOMERY, 2004).

As cartas de controle do tipo Shewhart, introduzidas por volta de 1930, continuam a ser uma das ferramentas mais utilizadas em controle de qualidade. Shewhart, naquela época, preocupou-se em avaliar a qualidade, observando apenas uma característica do produto de cada vez. Na sua concepção e utilização é necessário ter em conta, para além da escolha de subgrupos racionais (quando se tem tamanho de amostras maior que um), três aspectos fundamentais: os instantes de amostragem (pontos amostrados no tempo), os tamanhos das amostras e os

limites de controle (INFANTE ; DIAS, 2006).

O objetivo das cartas de controle (Shewhart, CUSUM e MMEP) é monitorar a variabilidade existente nos processos, distinguindo causas comuns (causadoras de pequenas variações aleatórias e, via de regra, inofensivas ao processo) de causas especiais. Estas devem ser identificadas e corrigidas para que o processo permaneça dentro de um padrão esperado de desempenho (MICHEL ; FOGLIATTO, 2002).

A determinação do tamanho da amostra e da frequência da amostragem são indispensáveis no planejamento de uma carta de controle. Tais parâmetros são definidos tendo-se em vista o tamanho da mudança no processo a ser detectada pela carta de controle e a rapidez com que se deseja detectar esta mudança. Pequenas mudanças no processo são rapidamente detectadas, utilizando-se grandes amostras tomadas frequentemente, o que se torna economicamente inviável (MICHEL ; FOGLIATTO, 2002).

A carta de controle de Shewhart é um instrumento para ser usado na especificação, produção e inspeção de um processo e, quando usado, traz três fases deste dentro de uma interdependência completa (VARGAS, LOPES ; SOUZA, 2004). Usando uma carta de controle para

a média, utilizam-se usualmente os limites “3- sigma” (INFANTE ; DIAS, 2006).

O intervalo da distribuição normal, quando usado o  $\mu \pm 3\sigma$ , corresponde a 99,7%. Portanto, a faixa de variabilidade normal num processo sob controle é a do intervalo  $\mu - 3\sigma$  e  $\mu + 3\sigma$ . As causas que ocorrem fora deste intervalo são identificáveis e, conseqüentemente, exigem pronta correção (MONTGOMERY, 2004).

Os gráficos contêm uma linha central (*LC*) que é dada pelo valor médio do processo. O limite superior de controle (*LSC*) e o limite inferior de controle (*LIC*) definem os valores - máximo e mínimo - de uma variável. Assim, no estado de estabilidade, a probabilidade de um ponto cair fora dos limites de controle torna-se muito pequena (MONTGOMERY, 2004; ALBERS ; KALLENBERG, 2004).

MONTGOMERY (2004) comenta que a principal desvantagem de qualquer gráfico de controle de Shewhart é usar somente informação sobre o processo contido no último ponto demarcado e ignorar qualquer informação dada pela sequência inteira de pontos. Esta característica faz com que o gráfico de controle de Shewhart seja insensível a pequenos e contínuos desvios no processo, da ordem de até 1,5 desvios-padrão.

O gráfico de controle para medidas individuais, chamado gráfico I, monitora a variação da média e da amplitude móvel de

amostras com um só elemento. Esse tipo de gráfico é eficaz, porém, perde esta característica quando os processos vão ficando “mais robustos” (robustos no sentido de causas especiais cada vez mais interferirem com menos profundidade, de modo que a magnitude dos desvios ou dos aumentos tende a diminuir). Nestes casos, é aconselhável utilizar os gráficos de CUSUM e o gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente – MMEP, que são indicados para o monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações (MONTGOMERY, 2004).

Para monitorar processos sujeitos a pequenas perturbações, utiliza-se o gráfico de controle chamado CUSUM (somas acumuladas) e o gráfico de controle chamado MMEP (média móvel ponderada exponencialmente). Nestes casos, tais métodos se mostram mais ágeis e estimam com maior credibilidade do que os gráficos de controle de Shewhart. Quando se utiliza um desses gráficos, a decisão sobre o estado do processo é baseada na informação acumulada de diversas amostras e não apenas na última delas, obtendo-se maior rapidez na sinalização de pequenos desajustes (MONTGOMERY, 2004).

O gráfico MMEP, de acordo com Costa, Epprecht ; Carpinetti (2004), é uma alternativa quando se tem como objetivo

detectar pequenos deslocamentos na média do processo. Seu desempenho é semelhante ao gráfico CUSUM.

A média móvel exponencialmente ponderada (MMEP) possui o parâmetro  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) chamado “fator de suavização”, que determina a magnitude dos pesos em relação aos retornos passados. Logo, quando  $\lambda$  se aproxima de zero, maior é a importância das observações recentes, em relação àquelas que estão no horizonte de tempo mais distante. Ao passo que, quando o fator de decaimento assume valor 1, a MMEP torna-se uma média simples (MARQUES, 2009).

Berlitz (2009) utilizou, em seu estudo de estabilidade de método analítico, fator de suavização de 0,5. Marques (2009) usou para o fator de suavização  $\lambda = 0,94$ . Ide, Ribeiro Junior ; Souza (2009) utilizaram os seguintes conjuntos de dados:  $L = 1,28 \lambda = 0,75$ ;  $L = 1,96 \lambda = 0,75$ .

A carta MMEP foi inicialmente proposta por Roberts [1959], para aplicações em controle de qualidade com variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*) e tem como objetivo suprir a deficiência apresentada pela carta de Shewhart, ou seja, incorporar diretamente o comportamento passado no ponto presente (MONTGOMERY, 2004).

Outro gráfico de controle é a carta CUSUM (somas acumuladas) que atribui

peso igual para a sequência inteira de dados, desde o mais antigo até o mais recente. A carta MMEP concede peso maior para as informações mais atuais e peso menor para as mais remotas (VARGAS, LOPES ; SOUZA, 2004).

O gráfico CUSUM é dividido em duas regiões: a de ação e a de controle, por limites superior e inferior. Os limites são de mesma magnitude; o superior é positivo e o inferior é negativo. Quando o valor de S (soma) ultrapassa um dos dois limites, isso é entendido como sinal de que a média do processo deslocou-se do valor médio. O gráfico CUSUM além de sinalizar o desajuste, informa quando este ocorreu (COSTA, EPPRESCHT ; CARPINETTI 2004).

O gráfico de controle CUSUM acumula a “pequena evidência” que cada amostra fornece do estado do processo. Consegue-se maior rapidez na sinalização de pequenos desajustes (COSTA, EPPRESCHT ; CARPINETTI 2004).

O CUSUM Tabular significa somas acumuladas unilaterais comparadas com intervalo de decisão H, em que um valor considerado razoável seria de ( $H= 5\sigma$ ), porém, geralmente a literatura traz o valor  $4\sigma$  (a escolha de H depende do número médio de eventos, até que ocorra uma mudança),  $k= 0,5$  (MONTGOMERY, 2004) e comprimento de sequência (que é sistema de vigilância) igual a 2, por ter

sido o valor que foi perceptível ao máximo às mudanças que ocorrem no processo (o comprimento de sequência deve ser inversamente proporcional à probabilidade de ocorrência do alarme falso, pois quanto maior a probabilidade para este tipo de alarme menor é o número de observações até que ele aconteça). Como valor alvo utilizou-se a média dos dados de cada variável. Se um valor da soma for maior ou menor que o intervalo H, o processo está fora de controle (MONTEGOMERY, 2004; RIBEIRO JUNIOR ; GONÇALVES, 2009). Também é recomendado o uso do valor 2 por Ide, Ribeiro Junior ; Souza (2009), em função da facilidade do uso e da não incidência de alarmes falsos no processo.

O gráfico de controle CUSUM tabular é eficaz para detectar pequenas ou grandes variações especiais e, para o estudo realizado por FOLLADOR (2010), com base nos valores utilizados de k e h e sendo a amostra de tamanho  $n=1$ , utilizou-se k de 0,5, como sugerem Souza *et al.* (2008), que usaram valores de k entre 0,5 e 1,0 que auxiliam para que não ocorram alarmes falsos na detecção de pontos fora de controle. Ribeiro Junior ; Gonçalves (2009) também recomendam que os valores de k estejam entre 0,25 e 1,5 e os de H estejam entre 3 e 6 desvios-padrão. Geralmente, utiliza-se um valor para H igual a cinco vezes o desvio-padrão do

processo ( $H = 5\alpha$ ), pois este é um valor condizente com a literatura da área (MOREIRA *et al.*, 2008). Ide, Ribeiro Junior ; Souza (2009) utilizaram em seu estudo valores de  $H = 4$  e  $k 0,5$ .

O objetivo deste trabalho foi demonstrar o uso de cartas de controle univariadas do tipo Shewhart, Cusum e MMEP, aplicadas principalmente ao controle de qualidade da água, de acordo com metodologia descrita por MONTGOMERY (2004) e do programa computacional Minitab versão 15.0, bem como qual a mais eficaz dentre os trabalhos pesquisados.

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

### **Análise estatística preliminar**

Para permitir a visualização geral do comportamento de dados, deve ser realizada uma análise preliminar destes utilizando programas estatísticos como por exemplo o *Minitab* ou o *Statgraphics*, calculando medidas de tendência central (média aritmética e mediana), medidas de dispersão (valores máximo e mínimo, desvio-padrão e coeficiente de variação) e medidas de assimetria e de curtose.

Também deve ser realizado testes para caracterizar a normalidade dos dados como os de Anderson-Darling, Ryan-Joiner (similar ao Shapiro-Wilk) e Kolmogorov-Smirnov, e, ainda, realizar

ensaio de autocorrelação, que são condições essenciais para o uso de gráficos de controle, pois, quando não atendem a essas características, os resultados podem ser enganosos (MONTGOMERY, 2004).

### **Teste de normalidade e transformação dos dados**

Para aplicar técnicas estatísticas de controle de processos no controle de qualidade é necessário testar a normalidade dos dados estudados aplicando os testes como citado acima. Quando um dos testes acusar normalidade, considera-se distribuição normal dos dados. Muito embora, segundo Montgomery (2004), ao usar o gráfico de Shewhart e gráficos MMEP exista a possibilidade dos dados do processo não seguirem distribuição normal.

Para dados que não seguirem distribuição normal, pode-se aplicar técnicas de transformação para a busca da normalidade que pode ser, por exemplo, a de box-cox. Para uma série de observações orientadas no tempo (chamada série temporal) pode ser aplicado o modelo do tipo ARIMA (modelo autoregressivo de média móvel) de séries temporais e para a execução dos gráficos utilizar os resíduos.

### **Transformação box-cox**

A transformação Box-Cox é muito útil e particular, entre a família das

transformações estatísticas, e pode ser definida de acordo com a Equação 1.

$$y(\lambda) = \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{Eq. (1)}$$

em que:

$y$  - variável resposta e;

$\lambda$  - parâmetro de

transformação.

Porém, essa equação é válida para  $\lambda$  diferente de zero, se for igual a zero aplica-se o logaritmo natural ( $\log y$ ). No estudo de FOLLADOR (2010), os valores utilizados foram os propostos automaticamente pelo programa Minitab, sendo o lambda ótimo variando de -5 a 5.

### **Modelo autoregressivo de média móvel (ARIMA)**

Quando dados analisados apresentam autocorrelação, deve-se modelar diretamente a estrutura correlacional com um modelo apropriado de série temporal, ou seja, um modelo que remova a autocorrelação dos dados, aplicando-se gráficos de controle aos resíduos (MONTGOMERY, 2004; MINGOTI ; YASSUKAWA, 2008).

Quando os dados não são normais ou apresentam autocorrelação, é necessário efetuar a transformação dos dados e, por

vezes, aplicar séries temporais, como é o caso dos estudos desenvolvidos por Safádi (2004), com séries temporais, em que analisou a vazão de água de uma barragem e concluiu que o melhor modelo que se ajustou aos seus dados foi o SARIMA, que é um modelo de série temporal.

Cook et al. (2006) usaram modelo de série temporal AR (autoregressivo) e relatam que este modelo é o mais popular modelo de simulação de séries temporais e previsão em hidrologia.

No estudo de FOLLADOR (2010), foram testadas todas as possibilidades de ARIMA com número 1 e utilizou-se o modelo autoregressivo (AR) p,d,q 1,0,0, como o que melhor se ajustou aos dados, buscando-se a remoção da autocorrelação pela construção de gráficos de controle com os resíduos, tendo sido testada novamente a normalidade e a autocorrelação, após a geração dos resíduos (este se comportará como uma variável aleatória independente e identicamente distribuída. Portanto, os gráficos de controle convencionais podem ser aplicados a essa série de resíduos).

No modelo ARIMA (p,d,q), quando se utilizam valores, como no estudo de FOLLADOR (2010),  $p = 1$ ,  $d = 0$  e  $q = 0$ , em que:  $p$  é o número de termos autoregressivos,  $d$  é o número de diferenças e  $q$  é o número de termos da média móvel, passa a ser um AR

(autoregressivo). Após terem sido testados vários valores para  $p, d, q$ , os valores escolhidos pela autora foram com base no erro quadrático, ou seja, o menor erro foi com os valores acima, assumidos para  $p, d, q$ , justificando a escolha dos valores para o modelo. A opção de não sazonalidade também deve ser escolhida.

De acordo com metodologia de Box e Jenkins, a modelagem ARIMA deve seguir três passos básicos, antes de se proceder aos cálculos das previsões: a) identificação/seleção do modelo, b) estimação e c) verificação. O passo mais importante é o primeiro, em que se determinam os valores apropriados de  $p, d$  e  $q$  (WERNER ; RIBEIRO, 2003).

Montgomery (2004) afirma que existem pelo menos duas dificuldades na implementação dessa abordagem. A primeira é que o pesquisador precisará identificar e ajustar um modelo ARIMA apropriado para o processo. Um modelo inapropriado, identificado incorretamente, comprometerá o desempenho do método e a identificação não é uma tarefa livre de erros, essa também é a opinião de Zhang (1998).

Em um modelo autoregressivo, a série de dados históricos  $Z_t$  é descrita por seus valores passados regredidos e pelo ruído aleatório  $\varepsilon_t$ . O modelo AR ( $p$ ) é dado pela Equação 2.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + \varepsilon_t$$

Eq. (2)

em que:

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu ;$$

$\phi_1$  - é o parâmetro (peso)

que descreve como  $\tilde{Z}_t$  se relaciona com o valor para  $\tilde{Z}_{t-1} = 1, 2, \dots, p$  (que é a série de dados).  $\varepsilon_t$  é o erro aleatório.

O modelo autoregressivo de ordem 1 ou AR (1) é a versão mais simples dessa classe de modelos. Sua apresentação algébrica é dada pela Equação 3.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{Eq. (3)}$$

### Estudo da correlação e transformação dos dados

Para o uso e aplicação de cartas de controle, os dados devem apresentar independência entre si, sendo fundamental a investigação da autocorrelação do grupo de informações. A presença da autocorrelação compromete o desempenho dos gráficos de controle, no sentido em que se podem confundir as causas especiais e comuns do processo. A autocorrelação é o coeficiente de correlação entre observações defasadas no tempo.

De acordo com Montgomery (2004), a violação da hipótese de independência das observações reduz a aplicabilidade dos gráficos convencionais. As observações podem cair fora dos limites do gráfico, com o processo sob

controle, comprometendo a credibilidade e aumentando a ocorrência de alarmes falsos (IDE, RIBEIRO JUNIOR ; SOUZA, 2009).

De acordo com Claro, Costa ; Machado (2007), quando ocorre autocorrelação entre os dados, pressupõe-se que ocorrerão alarmes falsos no gráfico e esta deveria ser verificada antes dos dados serem analisados e interpretados.

Montgomery (2004) afirma que a autocorrelação é a medida de dependência de uma observação num instante T, em relação àquela tomada num instante T-K, em que K é a defasagem (lag) considerada, ou seja, a distância entre as duas observações. Na pesquisa de FOLLADOR (2010), utilizou-se lag 1 para testar a autocorrelação, que mede o quanto o valor de uma variável é capaz de influenciar a amostra vizinha no tempo.

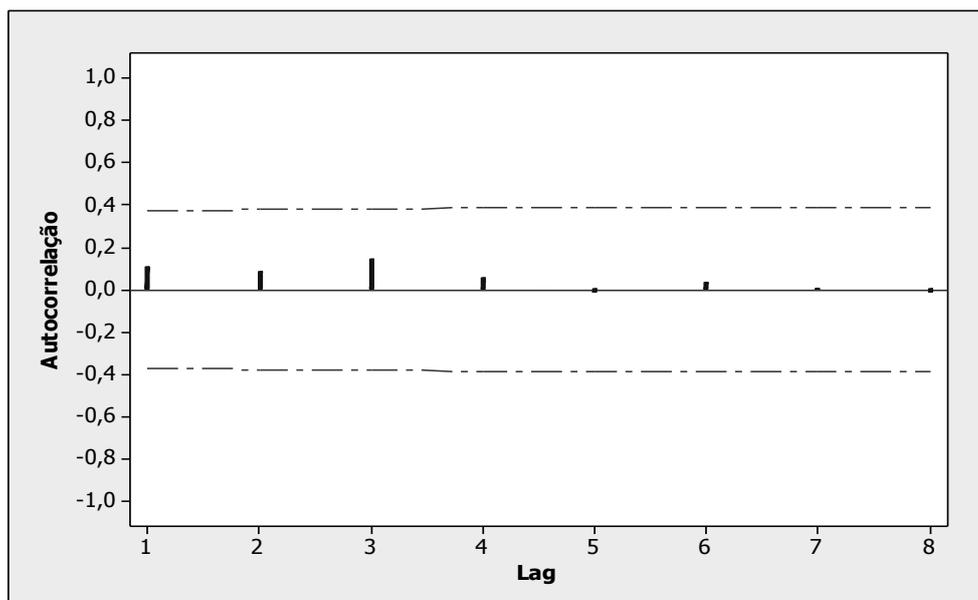
A verificação da autocorrelação se deu por meio da função de autocorrelação amostral, a qual, segundo Montgomery (2004), pode ser estimada pela Equação 4.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad \text{Eq. (4)}$$

em que:

- $k$  - 0, 1, ..., K;
- $\bar{x}$  - média da amostra.

As linhas tracejadas são os limites de dois desvios-padrão. Quando excedidos pelas linhas azuis, que correspondem às amostras coletadas significa que os dados apresentam autocorrelação (MONTEGOMERY, 2004). Na Figura 1, apresenta-se um gráfico em que os dados não apresentam correlação.



**Figura 1.** Exemplo de gráfico de autocorrelação entre dados.

Quando dados analisados apresentam autocorrelação, deve-se modelar diretamente a estrutura correlacional com um modelo apropriado de série temporal, ou seja, um modelo que remova a autocorrelação dos dados, aplicando-se gráficos de controle aos resíduos (MONTGOMERY, 2004; MINGOTI ; YASSUKAWA, 2008).

Podem ser utilizados modelos ARIMA, identificando qual o melhor tipo para cada situação de estudo. Isso é realizado através de testes estatísticos, devendo ser observado o erro quadrático, justificando a escolha dos valores do modelo utilizado. A opção de sazonalidade também deve ser escolhida.

De acordo com metodologia de Box e Jenkins, a modelagem ARIMA deve seguir três passos básicos, antes de se proceder aos cálculos das previsões: a) identificação/seleção do modelo, b) estimação e c) verificação. O passo mais importante é o primeiro, em que se determinam os valores apropriados de p, d e q (WERNER ; RIBEIRO, 2003).

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### Gráficos de controle

Dentre os gráficos de controle utilizados apresenta-se o gráfico de Shewhart, que também é chamado de gráfico individual, o gráfico de Cusum e o

gráfico da média móvel ponderada exponencial – MMEP.

#### Gráfico de controle de medida individual - Shewhart

As convenções utilizadas na carta de controle são descritas como LIC e LSC, limites inferior e superior de controle, respectivamente, determinados estatisticamente, a partir da média, e as amplitudes das amostras são função da variabilidade do processo. Abaixo as equações 5, 6 e 7, que mostram os limites superior, linha média e limite inferior de controle, segundo Montgomery (2004):

$$LSC = \mu + 3 \frac{AM}{d_2} \quad \text{Eq. (5)}$$

$$LC = \mu \quad \text{Eq. (6)}$$

$$LIC = \mu - 3 \frac{AM}{d_2} \quad \text{Eq. (7)}$$

em que:

- $LC$  - linha média;
- $\mu$  - média;
- $LIC$  - limite inferior de controle;
- $AM$  - amplitude da amostra;
- $d_2$  - fator para construção de gráficos de controle para variáveis encontrado em MONTGOMERY (2004);
- $LSC$  - limite superior de controle.

Amplitude de uma amostra é o valor absoluto da diferença entre essa amostra e a anterior. Não se define amplitude para a primeira amostra. Neste estudo, a amplitude foi calculada de acordo com a Equação 8.

$$A = |x_i - x_{i-1}| \quad \text{Eq. (8)}$$

Nos trabalhos de Silva *et al.*, 2006, os gráficos de Shewhart forneceram uma análise simples dos dados, sendo de fácil adaptação e integração com as práticas de controle já existentes nos laboratórios. Também nestes gráficos, há baixa probabilidade de falsos alarmes e melhor capacidade de identificação de erros analíticos, por isso podem ser usados para uma grande gama de processos.

Segundo CORBETT ; PAN (2002), para avaliar de forma rápida e eficiente os dados que indicam a situação ambiental, principalmente a qualidade da água, podem ser utilizadas técnicas de controle estatístico do processo. Estas técnicas trazem eficácia para o monitoramento ambiental. A falta de equilíbrio no controle do processo e um processo que mantivesse a eficiência e a precisão foi o que criou a proposta destas técnicas. São muitos os tipos de análise estatística que se podem utilizar, dentre elas destacam-se a carta de controle individual (Shewhart), a carta MMEP, a carta de CUSUM

### Gráfico de controle por soma cumulativa – CUSUM

No gráfico CUSUM, à medida que as amostras são retiradas, os desvios de  $\bar{X}$  em relação ao valor-alvo  $\mu_0$  (ou ao valor médio em controle) são acumulados, gerando a Equação 9.

$$C_i = \sum_{j=1}^i [(x_j) - \mu_0] \quad \text{Eq. (9)}$$

em que:

$\bar{X}_j$  - média da j-ésima amostra de tamanho  $n \geq 1$ .

Enquanto a média do processo permanecer ajustada ao alvo (que neste trabalho foi a média do processo), os desvios positivos ( $\bar{X} > \mu_0$ ) serão compensados pelos negativos ( $\bar{X} < \mu_0$ ) e a fórmula oscilará, de forma aleatória, em torno do valor zero. Se, porém, a média do processo aumentar (ou diminuir), o S crescerá (ou decrescerá) indefinidamente (COSTA, EPPRESCHT ; CARPINETTI, 2004).

Existem duas maneiras de representar o CUSUM, o CUSUM tabular (ou algoritmo), e a forma máscara V do CUSUM. Das duas representações, a tabular é preferida pela maioria (MONTGOMERY, 2004).

O intervalo de decisão H, utilizado na pesquisa de FOLLADOR (2010), que

trabalhou com qualidade da água, foi o valor de  $4\sigma$ , o valor de  $k = 0,5$  (magnitude da mudança) e o valor do comprimento de sequência igual a 2, conforme sugere o *software* utilizado e autores como Montgomery (2004) e Nezhad ; Niaki (2010).

CUSUM é um plano de controle de decisão intervalar bilateral simétrico que utiliza planos superior (+)  $C_i^+$  e inferior (-)  $C_i^-$  para detectar mudanças, conforme Equações 10 e 11.

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad \text{Eq. (10)}$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad \text{Eq. (11)}$$

em que:

- $C$  - zero;  $X_i$  é a observação no tempo;
- $\bar{x}$ ;  $\mu_0$  - é a média da amostra;
- $K$  - valor compensação ou folga, está entre a média desejada e a obtida.

Nezhad ; Niaki (2010) estudaram vários tipos de cartas de controle como Shewhart, CUSUM, MMEP, constatando que, para amostras de tamanho 1, os gráficos de CUSUM e MMEP são mais eficazes por detectarem com mais precisão pequenas mudanças no processo.

### Gráfico da média móvel ponderada exponencial – MMEP

Segundo Montgomery (2004), o gráfico da média móvel exponencialmente ponderada pode ser definido pela Equação 12.

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad \text{Eq. (12)}$$

em que:

$$0 < \lambda \leq 1;$$

$z_0 = \mu_0$  (valor-alvo ou valor médio em controle de  $X_i$ ).

A variância da variável  $z$  é dada pela Equação 13.

$$\sigma_z^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{2} - \lambda \right) [1 - (1 - \lambda^2)] \quad \text{Eq. (13)}$$

em que:

- $\sigma$  - é a variância da variável  $X$ ; portanto, a linha média e os limites de L-sigma do gráfico de MMEP são dados pelas Equações 14, 15 e 16.

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left( \frac{\lambda}{(2 - \lambda)[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}\right)} \quad \text{Eq. (14)}$$

$$\text{Linha central} = \mu_0 \quad \text{Eq. (15)}$$

$$LIC = \mu_0 - \square\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \quad \text{Eq. (16)}$$

em que,  $\sigma$  é o desvio-padrão do processo quando em controle.

Em FOLLADOR (2010) o peso da amostra  $\lambda$  (mudança que se quer detectar), utilizado foi de 0,2 que é o valor que o *software* utilizado indica como ideal para conjunto de dados e, também, porque foram testadas várias hipóteses. A que melhor se adaptou foi com esse valor e o valor de  $L$  (número de desvios-padrão que se quer detectar como variação aleatória; aparecimento de primeiro sinal), conhecido na literatura inglesa como *Average Run Length* (ARL), foi de 2.

Claro, Costa ; Machado (2007), em seus estudos com gráficos de controle, observaram que o gráfico MMEP que apresenta baixa constante de alisamento  $\lambda$  tem melhor desempenho, tendo sido indicado em seus estudos o uso deste tipo de carta.

Zhou *et al.* (2008) utilizaram cartas de controle de Shewhart e CUSUM e depois as correlacionaram, monitorando a qualidade da água. Seu trabalho resultou na combinação de cartas de controle, percebendo a importância de seu uso para processos que estão sob controle. Também afirmam que, para monitorar um manancial e ser bem sucedido na interpretação dos dados, deve-se fazer avaliação estatística para se ter um entendimento global do sistema, além da independência dos dados,

caso contrário os testes estatísticos seriam inválidos.

Vargas, Lopes ; Souza (2004), em seus estudos de comparação de cartas de controle, observaram que as cartas de controle CUSUM e MMEP apresentam resultados muito próximos, observando que a carta MMEP pode ser considerada mais lenta para reagir que a carta CUSUM para algumas mudanças no processo.

Em Follador (2010), uma aplicação prática da técnica de controle estatístico de qualidade foi usada na avaliação da qualidade da água do rio Mandurim, localizado em Marmeleiro no Sudoeste do Paraná. Os parâmetros escolhidos para avaliação da qualidade da água foram: oxigênio dissolvido, temperatura, coliformes fecais, coliformes totais, demanda bioquímica de oxigênio, demanda química de oxigênio, fósforo, pH, nitrogênio, sólidos totais e turbidez. As análises foram realizadas de acordo com metodologia descrita no *Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater*, totalizando 30 amostras de água entre os anos de 2003 e 2009, sendo o gráfico do tipo MMEP o mais eficaz nesta pesquisa.

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos, nesta pesquisa nos permitem concluir que:

As cartas de controle são métodos eficazes para a determinação de causas especiais que podem estar atuando nos processos.

Mesmo com elevada variabilidade dos dados, as cartas mostram-se como alternativas interessantes de metodologia estatística.

Dentre as cartas de controle analisadas nos trabalhos observados nesta pesquisa, a MMEP mostrou-se mais eficaz, principalmente quando se tratar de estudos para indicar o controle de qualidade de água.

Sugerem-se novas pesquisas sobre o uso das técnicas de controle estatístico de qualidade, para aprimorar conhecimentos e formas de aplicação nos mais diversos campos.

## 5. REFERÊNCIAS

- ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. **Estimation in Shewhart control charts: effects and corrections.** *Metrika*. Berlin - Alemanha, v. 59, p. 207-234, 2004. DOI 10.1007/s001840300280.
- BERLITZ, F. Proposta de abordagem de controle de qualidade de longo prazo para avaliar a estabilidade de um método analítico. Porto Alegre – RS: **Publicações Weinmann**. Disponível em: [www.publicacoesweinmann.com.br/2009/08/proposta](http://www.publicacoesweinmann.com.br/2009/08/proposta). Acesso em: 20 dez. 2009.
- CLARO, F. A. E.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de MMEP e de X para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Revista Produção**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 536-546, set./dez. 2007.
- COOK, D. F.; ZOBEL, C. W.; WOLFE, M. L. Environmental statistical process control using an augmented neural network classification approach. **European Journal of Operational Research**, v. 174, p. 1631-1642, 2006.
- CORBETT, C.; PAN, J. N. Evaluating environmental performance using statistical process control techniques. **European journal of operational research**, n. 139, p. 68-83, 2002.
- COSTA, A. F. B.; EPPRESCHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. São Paulo: Atlas, 2004.
- FOLLADOR, F. A. C. Controle estatístico de processo aplicado à qualidade de águas superficiais. 2010. 130f. **Tese de doutorado** (Doutorado em Engenharia Agrícola). Programa de pós graduação em Engenharia Agrícola - Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. Cascavel – PR, 2010.
- IDE, M. S.; RIBEIRO JUNIOR, J. I.; SOUZA, L. M. Gráficos de controle com uma abordagem de séries temporais. **Revista eletrônica Produção e Engenharia**, Viçosa, MG, v. 2, n. 1, p. 69-84, jan./jul. 2009.
- INFANTE, P.; DIAS, J. R. Carta X com amostras de tamanho variável: um novo procedimento dinâmico. **Revista Investigação Operacional**, Lisboa, Portugal, n. 26, p. 45-63, 2006.
- MARQUES, R. A. G. Adequação do *BackTesting* no Modelo *Value-at-Risk*: Comparação entre aproximação normal e o teste de razão de verossimilhança. **R. Bras.**

- Risco e Seg.**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 9, p. 1-22, abr./set. 2009.
- MICHEL, R.; FOGLIATTO, F. S. Projeto econômico de cartas adaptativas para monitoramento de processos. **Gest. Prod.** São Carlos, v. 9, n. 1, p. 17-31, abr. 2002, ISSN 0104-530X., Versão impressa: DOI 10.1590/S0104-530X2002000100003.
- MINGOTI, S. A.; YASSUKAWA, F. R. S. A comparação de gráficos de controle para a média de processos autocorrelacionados. **Revista Eletrônica Sistemas e Gestão**, Rio de Janeiro, RJ, v. 3, n. 1, p. 55-73, jan./abr., 2008.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- MOREIRA, P. D. O.; PINHEIRO, L.; RIBEIRO, J.; DE SOUZA, C. R. B.; REIS, R. Q. Aplicação dos gráficos de controle CUSUM tabular para avaliação da aderência dos projetos ao processo de *software*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE QUALIDADE DE *SOFTWARE*, 2008, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: SBC, 2008. 1 CD-ROM.
- NEZHAD, M. S. F.; NIAKI, S. T. A. A New monitoring design for univariate statistical quality control charts. *Information Sciences*, v. 180, p. 1051-1059, 2010.
- RIBEIRO JUNIOR, J. I.; GONÇALVES, T. C. Métodos alternativos de controle estatístico de processo univariado. **Revista eletrônica Produção ; Engenharia**, Viçosa, MG, v. 2, n. 1, p. 85-95, jan./jul., 2009.
- SILVA, W. V.; NOGAS, P. S. M.; SILVA, E. D.; COSTA, L. S. Aplicação do gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (MMEP) para monitorar a variabilidade de um processo produtivo. In: SIMPÓSIO DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO E TECNOLOGIA, 2, 2006, Resende - RJ. Disponível em: [http://www.aedb.br/anais-seget/ac\\_pos.htm](http://www.aedb.br/anais-seget/ac_pos.htm). Acesso em: 10 fev. 2009. ISSN-1807-409X.
- SOUZA, L. M.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; REIS, G. M.; IDE, M. S. Eficiência dos gráficos de controle XBARRA, EWMA e CUSUM. **Rev. Eletrônica Produção ; Engenharia**, Viçosa, MG, v. 1, n. 1, p. 81-94, set./dez. 2008.
- VARGAS, V. C. C.; LOPES, L.F.D SOUZA, A. M. Comparative study of the performance of the CuSum and EWMA control charts. *Computers ; Industrial Engineering*, Los Angeles, USA, v. 46, n. 4, p. 707-724, 2004.
- WERNER, L.; RIBEIRO, J. L. D. Previsão de demanda: uma aplicação dos modelos Box-Jenkins na área de assistência técnica de computadores pessoais. **Gest. Prod.**, São Carlos, v. 10, n. 1, p. 47-67, abr. 2003. DOI 10.1590/S0104-530X2003000100005.
- ZHANG, N. F. Estimating process capability indexes for autocorrelated data. **Journal of Applied Statistics**, U.K., v. 25, n. 4, p. 559-574, 1998.
- ZHOU, W.; BECK, B. F.; PETIT, A. J.; WANG, J. Application of water quality control charts to spring monitoring in karst terranes. **Environmental Geology**, Heidelberg, Berlin, v. 53, n. 6, p. 1311-1321, 2008. DOI 10.1007/s00254-007-0739-1.